

Série d'exercices n°13

Solution de l'exercice 1

Le coefficient D a les dimensions d'une longueur au carré sur un temps :

$$D \sim \frac{L^2}{\tau}.$$

Pour estimer la valeur de D , on peut ainsi prendre la longueur caractéristique L du domaine considéré, l'élever au carré, et la diviser par la durée caractéristique τ du phénomène de diffusion. Dans le cas présent, on connaît D et l'on cherche à en déduire τ . On peut donc écrire :

$$\tau \sim \frac{L^2}{D} = \frac{0,05^2}{0,52 \cdot 10^{-9}} = 4,8 \cdot 10^6 \text{ s}.$$

La durée τ pour qu'un morceau de sucre se dissolve entièrement dans une tasse de café est donc d'environ 8,3 semaines. On a supposé ici que les molécules de sucre se dispersaient uniquement par diffusion. On voit donc tout l'intérêt d'utiliser la cuillère pour accélérer le processus de mélange !

Solution de l'exercice 2

Pendant dt , une longueur l de fil produit une quantité de chaleur :

$$\delta Q = P_l dt. \quad (1)$$

Cette chaleur doit être transférée vers l'extérieur. En régime permanent, le flux est constant pour chaque couche cylindrique.

On a donc, entre r et $r + dr$:

$$P = \frac{\delta Q}{dt} = -\lambda \mathcal{A} \frac{dT}{dr} = -\lambda 2\pi r l \frac{dT}{dr} \quad (2)$$

Ainsi,

$$P_l \cdot l = -\lambda 2\pi r l \frac{dT}{dr} \quad (3)$$

$$dT = -\frac{P_l}{2\pi\lambda} \frac{dr}{r} \quad (4)$$

$$T_0 - T_i = -\frac{P_l}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_1}{r_0} \quad (5)$$

$$T_i = T_0 + \frac{P_l}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_1}{r_0} \quad (6)$$

$$(7)$$

Solution de l'exercice 3

1. L'équation de diffusion de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

En posant $\theta = T - \bar{T}$ comme suggéré dans l'énoncé, on peut réécrire cette équation comme :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \quad (8)$$

avec la condition au bord suivante :

$$\theta(0, t) = A \cos(\omega t). \quad (9)$$

On cherche une solution de l'équation (8) de la forme $\theta(z, t) = a(z) \exp(i\omega t)$. En injectant cette expression dans (8), on trouve :

$$\frac{d^2 a}{dz^2} = \frac{i\omega}{D} a. \quad (10)$$

En posant formellement $\lambda^2 = i\omega/D$, on retrouve une équation différentielle du second ordre, avec pour solution générale $\alpha e^{-\lambda z} + \beta e^{-\lambda^* z}$ *

Pour prendre la racine carrée et calculer λ , on réécrit la pulsation complexe sous une forme polaire :

$$\lambda^2 = \frac{i\omega}{D} = \frac{\omega}{D} \exp\left\{\frac{i\pi}{2} + 2i\pi n\right\}, \quad (11)$$

avec n un nombre entier quelconque. On trouve alors 2 solutions :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\omega}{D}} \exp\left\{\frac{i\pi}{4} + i\pi n\right\} \quad (12)$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{D}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{i\pi n} \quad (13)$$

$$= \frac{1}{\delta} (1 + i) (-1)^n \quad (14)$$

$$= \pm \frac{1}{\delta} (1 + i) \quad (15)$$

Sans perdre de généralité, prenons λ comme étant la solution "+", l'autre étant $-\lambda$. La solution générale est alors :

$$\theta(z, t) = \alpha e^{-\lambda z + i\omega t} + \beta e^{\lambda z + i\omega t} = \alpha e^{-z/\delta + i(\omega t - z/\delta)} + \beta e^{z/\delta + i(\omega t + z/\delta)} \quad (16)$$

Il n'est pas physique que la température diverge avec la profondeur, ce qui force $\beta = 0$. De plus, la température étant une grandeur réelle, on doit donc prendre la partie réelle de notre solution[†] : $\theta(z, t) = \alpha e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta)$. Pour trouver la

*. Cela peut sembler "illégal" de résoudre cette équation différentielle comme cela, en oubliant que la fréquence est ici purement complexe. Même avec λ complexe, la dérivée seconde de $e^{\lambda z}$ est $\lambda^2 e^{\lambda z}$. L'espace des solutions est donc généré par $e^{\lambda z}$, pour tout λ (complexe ou non) tel que $\lambda^2 = i\omega/D$. Puisque $1^2 = (-1)^2 = 1$, les seules solutions possibles sont λ et $-\lambda$.

†. Cette étape peut sembler un peu hasardeuse. En fait, un ansatz $a(z)e^{i\omega t}$ a été choisi, mais d'autres solutions sont possibles. En particulier $b(z)e^{-i\omega t}$ fonctionne également, pour $b(z)$ satisfaisant la même équation différentielle que $a(z)$. Cela signifie que pour toute solution, son conjugué complexe est également solution. La partie réelle peut être écrite comme une combinaison linéaire d'un nombre et son conjugué : $\Re(z) = (z + \bar{z})/2$. Puisque l'équation différentielle pour θ est linéaire, toute combinaison linéaire de solutions est également solution, donc il est tout à fait légal de prendre la partie réelle pour obtenir une solution réelle.

constante d'intégration α , on utilise la condition au bord $z = 0$:

$$\theta(z = 0, t) = A \cos(\omega t) \quad (17)$$

$$\Leftrightarrow \alpha e^{-0/\delta} \cos(\omega t - 0/\delta) = A \cos(\omega t) \quad (18)$$

$$\Rightarrow \alpha = A \quad (19)$$

On retrouve donc bien la solution :

$$T(z, t) = \bar{T} + A \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(-\frac{z}{\delta} + \omega t\right), \quad (20)$$

On voit que l'amplitude des fluctuations décroît exponentiellement avec la profondeur. δ correspond à la profondeur caractéristique de décroissance à laquelle les fluctuations n'ont plus qu'une amplitude égale à 37% de leur valeur à la surface.

- On nous suggère de considérer un cycle journalier d'amplitude $A = 5^\circ\text{C}$ pour la température à la surface du sol. Une journée correspond à une durée de $T = 24 \times 3600 = 86400$ secondes, et donc à $\omega = 2\pi/T \approx 7,3 \cdot 10^{-5}$ rad/s. On trouve ainsi que la profondeur caractéristique de décroissance de l'amplitude des fluctuations de température vaut :

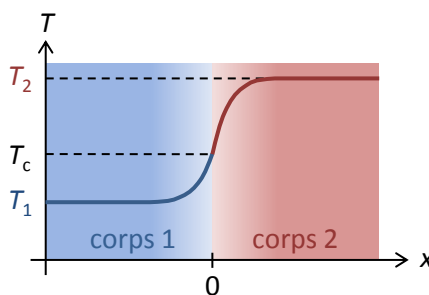
$$\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} \approx 8,7 \text{ cm.}$$

L'amplitude de fluctuation de la température à $z = 25$ cm de profondeur vaut ainsi : $A \exp(-z/\delta) \approx 0,5^\circ\text{C}$. En enterrant les canalisations à 25 cm de profondeur au moins, on est ainsi sûr qu'elles seront protégées contre le gel en hiver.

- La température à la surface du sol varie de façon quasi-sinusoidale au cours de l'année. Sa période de fluctuation correspond à 365 jours, soit une pulsation de $2\pi/(365 \times 24 \times 3600) = 2 \cdot 10^{-7}$ rad/s. La profondeur caractéristique associée vaut ainsi : $\delta \approx 1,7$ m. Votre connaissance a donc intérêt à creuser sa cave à au moins 2 mètres de profondeur pour s'assurer que la température n'y fluctuera que très peu au cours de l'année.

Solution de l'exercice 4

- À partir de l'instant initial où les deux corps sont mis en contact, il y a diffusion thermique du corps à la température T_2 vers le corps à la température T_1 . Après une période de transition, le régime permanent est atteint et les températures dans les deux corps ne changent plus au cours du temps. On se retrouve ainsi dans le cas schématisé sur la figure ci-dessous. La température dans le corps 2 vaut T_2 loin de l'interface (i.e. pour $x \gg 0$) et tend vers T_c lorsque $x \rightarrow 0$. De même, la température dans le corps 1 passe de T_1 pour $x \ll 0$ à T_c pour $x \rightarrow 0$.



Il s'agit d'un cas identique à celui traité dans l'exercice 3, où chacun des deux corps correspondrait au sol, et T_c à la température de surface. Cependant, T_c est constant



dans le cas présent, ce qui correspond à une période d'oscillation infinie, c'est-à-dire $\omega = 0$. Par la suite, on ne va pas considérer le cas limite $\omega = 0$, mais plutôt $\omega \rightarrow 0$, sans quoi $\delta = \sqrt{2D/\omega} \rightarrow +\infty$. En reprenant la solution de l'exercice 4, avec $A = T_c - T_1$ dans le corps 1 et $A = T_c - T_2$ dans le corps 2, on trouve que les profils de température dans les deux corps sont :

$$T^{(1)}(x) = T_1 + (T_c - T_1) \exp\left(\frac{x}{\delta_1}\right) \cos\left(-\frac{x}{\delta_1} + \omega t\right), \quad (21)$$

$$T^{(2)}(x) = T_2 + (T_c - T_2) \exp\left(-\frac{x}{\delta_2}\right) \cos\left(\frac{x}{\delta_2} + \omega t\right), \quad (22)$$

avec $\omega \rightarrow 0$. Le corps 2 correspond exactement au cas de figure traité à l'exercice 3, puisque x croît lorsque l'on s'enfonce dans le corps. L'inverse est vrai pour le corps 1, ce qui explique que l'on a remplacé x par $-x$ dans l'expression de $T^{(1)}$. On a également distingué δ_1 de δ_2 , puisque la conductivité thermique des deux corps n'est pas la même.

Pour trouver T_c , on utilise le fait que le flux thermique au niveau de l'interface est le même dans les deux matériaux :

$$J_{U,1}(0) = J_{U,2}(0) \Rightarrow -\lambda_1 \frac{dT^{(1)}}{dx} \Big|_{x=0} = -\lambda_2 \frac{dT^{(2)}}{dx} \Big|_{x=0}.$$

En utilisant les expressions (21)–(22) pour $T^{(1)}$ et $T^{(2)}$, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\delta_1} (T_c - T_1) \{\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\} &= -\frac{\lambda_2}{\delta_2} (T_c - T_2) \{\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\} \\ \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\sqrt{D_1}} (T_c - T_1) \{\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\} &= -\frac{\lambda_2}{\sqrt{D_2}} (T_c - T_2) \{\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les relations $\delta_1 = \sqrt{2D_1/\omega}$ et $\delta_2 = \sqrt{2D_2/\omega}$ dans la deuxième étape. N'ayant plus de facteur ω au dénominateur d'une fraction, on peut à présent prendre la limite $\omega \rightarrow 0$. On a alors : $\cos(\omega t) \rightarrow 1$ et $\sin(\omega t) \rightarrow 0$, et donc :

$$\frac{\lambda_1}{\sqrt{D_1}} (T_c - T_1) = -\frac{\lambda_2}{\sqrt{D_2}} (T_c - T_2).$$

On est conduit à introduire l'effusivité thermique $b = \lambda/\sqrt{D}$, ce qui donne :

$$b_1(T_c - T_1) = -b_2(T_c - T_2) \Rightarrow T_c = \frac{b_1 T_1 + b_2 T_2}{b_1 + b_2}.$$

Ainsi, la température de contact est la moyenne des températures des deux matériaux, pondérées par leurs effusivités et *non* leurs conductivités thermiques ou leurs diffusivités.

2. Avec les données de l'énoncé, on peut calculer les effusivités des différents matériaux :

$$\begin{aligned} b_{\text{peau}} &= \frac{\lambda_{\text{peau}}}{\sqrt{D_{\text{peau}}}} \approx 1,6 \cdot 10^3 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1} \text{ s}^{-1/2}, \\ b_{\text{bois}} &= \frac{\lambda_{\text{bois}}}{\sqrt{D_{\text{bois}}}} \approx 343 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1} \text{ s}^{-1/2}, \\ b_{\text{acier}} &= \frac{\lambda_{\text{acier}}}{\sqrt{D_{\text{acier}}}} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1} \text{ s}^{-1/2}. \end{aligned}$$

Dans le cas du toucher d'une pièce de bois à $T_2 = 100^\circ\text{C} = 373 \text{ K}$, la température de contact vaut :

$$T_c = \frac{1,6 \cdot 10^3 \times 310 + 343 \times 373}{1,6 \cdot 10^3 + 343} = 324 \text{ K}, \text{ soit } 48^\circ\text{C},$$



si la main est supposée à 310 K (= 37°C). En revanche, si le corps touché est une plaque en acier inox, cette température vaut :

$$T_c = \frac{1,6 \cdot 10^3 \times 310 + 8 \cdot 10^3 \times 373}{1,6 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^3} = 363 \text{ K, soit } 90^\circ\text{C},$$

d'où la sensation de chaud dans ce dernier cas.